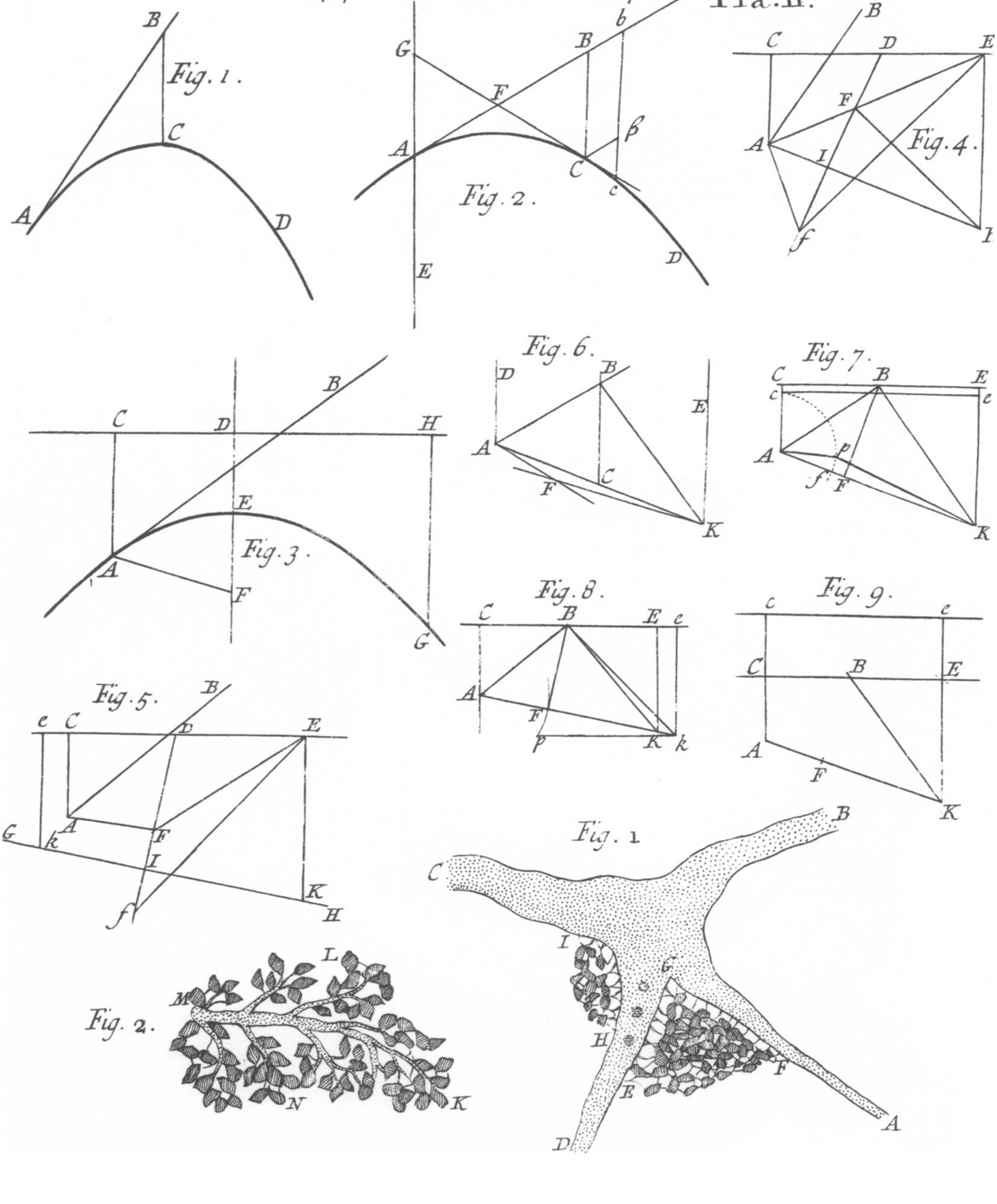
Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 1
Fig. 2.

VIII. *Propositiones aliquot de Projectilium motu Parabolico, Scriptæ An.* 1710. *Per* B. Taylor, *LL. D. R. S. S.*

PROPOSITIO I.

Vi gravitatis, ejusq; directione datis, motus corporis projecti, in medio non resistente, fit in Parabolâ.

DEMONSTRATIO.

PRojiciatur corpus de loco *A* (Fig. 1.) in directione lineæ *AB*, sitque ejus trajectoria curva *ACD*. Ad trajectoriæ punctum quodlibet *C*, duc rectam *CB* in directione vis Gravitatis, rectæ *AB* occurrentem in *B*; atq; resolvetur motus projectilis per *AC* in partes *AB*, *BC*, quarum *AB* oritur a motu projectionis uniformi, atq; *BC* a vi gravitatis accelerante. Est ergo recta descripta *AB* tempori proportionalis ab initio motûs in *A*, atq; est *BC* in duplicatâ ratione ejusdem temporis, sicut olim demonstravit Galilæus; adeoque in duplicatâ ratione rectæ *A B*. Cum ergo sit *BC* in duplicatâ ratione rectæ *AB*, constat curvam *ACD* esse Parabolam. *Q. E. D.*

PROP.

PROP. II.

Velocitas corporis projecti in quolibet puncto trajectoriæ, ea est, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem æqualem quartæ parti parametri Parabolæ ad punctum illud.

DEMONSTRATIO.

Sit Trajectoria *A C D* (Fig. 2.) Ad punctum quodlibet *A* ducantur tangens *A B*, & diameter *A E*. In tangente *A B* fiat *A B* æqualis dimidio parametri ad verticem *A*, & diametro *A E* parallela ducatur *B C*, trajectoriæ occurrens in *C*, & ad punctum *C* duci intelligatur tangens *C G*, tangenti *A B* occurrens in *F*, atq; diametro *A E* in *G*. Tum ex naturâ parabolæ erunt *A G*, *C B* æquales, adeoq; & *A F*, *F B*; & quoniam est *A B* æqualis dimidio parametri ad punctum *A*, erit *B C* quarta pars ejusdem parametri, & proinde æqualis ipsi *B F*. Ipsi *B C* proximam & parallelam duc *b c*, parabolæ occurrentem in *c*, & duc lineæ *B b* parallelam *C β*, ipsi *b c* occurrentem in *β*. Tum quoniam spatium *C c*, adeoque & spatium *β c*, finguntur perexigua, velocitates quibus describuntur erunt æquabiles quamproximè; adeoq; spatia *B b*, seu *C β*, *C c*, cum eodem tempore describantur, erunt ut velocitates quibus describuntur, & vicissim velocitates erunt ut spatia. Coincidant puncta *C*, *c*, atq; erunt hæ rationes accuratæ. Sed in isto casu propter similia triangula *C β c*, *F B C*, fit *C β* ad *β c*, sicut *F B* ad *B C*; ideoq; velocitates quibus describuntur *B b*, *β c* sunt ut *F B*, *B C*, hoc est, sunt æquales. Velocitas autem, quâ describitur *β c*,

ea

ea eſt, qua movetur projectile in puncto *A*, & velocitas altera qua deſcribitur *β c*, ea eſt quam corpus acquirit cadendo per altitudinem *B C* quartæ partis parametri ad punctum *A*. Eſt ergo velocitas projectilis in quolibet puncto *A* æqualis velocitati, quam corpus acquirere poteſt cadendo per altitudinem quartæ partis parametri ad punctum illud. *Q. E. D.*

PROP. III.

Datis velocitate & directione projectionis, invenire Trajectoriam corporis projecti.

1. Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 3.) in directione rectæ *A B*. Duc *A C* in directione vis gravitatis, (hoc eſt Horizonti perpendicularem,) ejus longitudinis, ut ſit *C* punctum, unde corpus cadendo acquirere poteſt velocitatem in *A*, quâ fit projectio. Duc *A F* æqualem *A C*, angulum *F A B* conſtituentem cum lineâ directionis *AB*, æqualem angulo *C A B*. Duc *C D* perpendicularem ad *A C* (hoc eſt horizonti parallelam,) eiq; occurrentem *FD*, ipſi *A C* parallelam. Biſeca *F D* in *E*; atq; erit *E F* axis, atq; *E* vertex principalis Parabolæ, per quam movetur projectile. Unde deſcribetur Trajectoria per notas proprietates Parabolæ. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *A C* quarta pars parametri ad verticem *A*. Unde conſtant cætera ex conicis.

2. Ad punctum Trajectoriæ quodvis *G*, duc *GH* ipſi *A C* parallelam, & ipſi *C D* occurrentem in *H*; atque iter *H G* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere

 poteſt

poteſt velocitatem, quâ movetur projectile in puncto *G*. *Q. E. F.*

Hoc item conſtat ex Prop 2. & ex conicis.

Scholium. Si ad puncta *A*, & *C* (Fig. 2.) ducantur tangentes *A B*, *C G* occurrentes rectis horizonti perpendicularibus *C B*, *A G*, in *B* & *G*; velocitates in *A* & *C* erunt inter ſe ut tangentium partes interceptæ, *A B*, *C G*.

PROP. IV.

Unico facto experimento invenire velocitatem projectionis.

Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 2.) in directione qualibet *A B*, atq; obſervetur punctum percuſſum *C*. In directione vis gravitatis ducatur *C B*, ipſi *A B* occurrens in *B*, atque ipſis *C B*, *A B*, fiat tertia proportionalis *L*. Erit quarta pars longitudinis *L* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere poteſt velocitatem projectilis in *A*. *Q. E. I.*

DEMONSTRATIO.

Eſt enim *L* parameter Trajectoriæ ad punctum *A*; unde conſtat ſolutio per propoſitionem ſecundam.

Scholium. Commodiſſimè inſtituitur experimentum, erectâ ad horizontem perpendiculari *A G*, & directionem ſumendo *A B*, quæ biſecet angulum *C A G*, rectâ etiam *A C* exiſtente horizonti parallelâ. Nam in iſto caſu altitudo quæſita æqualis eſt dimidio diſtantiæ *A C*.

PROP.

PROP. V.

Datis directione & velocitate projectionis; invenire occursum Trajectoriæ cum rectâ transeunte per punctum unde fit projectio.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. 4.) in directione rectæ AB. In directione gravitati contrariâ, fiat AC æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem, quâ fit projectio, atq; ducatur CE ipsi AC perpendicularis. Fiat FA æqualis ipsi CA, atq; angulum constituens FAB æqualem angulo CAB. Sit AK recta, cujus occursus cum Trajectoriâ quæritur. Duc FI ipsi AK perpendicularem, atq; ipsi CE occurrentem in D. In CE sume ED æqualem CD, atq; ducatur ipsi CE perpendicularis EK, ipsi AK occurrens in K. Erit K punctum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

In FI productâ fiat fI æqualis FI, atq; ducantur fA, fE, FE, FK. Quoniam est angulus FIA rectus, atq; fI æqualis FI, est etiam fA æqualis FA. Sed per constructionem est FA æqualis CA, atque angulus DCA rectus. Sunt ergo puncta C, F, f ad circulum centro A descriptum, quem tangit recta DC in C. Sunt ergo FD, CD, fD, continuè proportionales. Sed est ED æqualis CD (per constructionem) Sunt ergo FD, ED, fD continuè proportionales; adeoque ob angulum communem ad D, triangula FED, EfD sunt similia, atque angulus DEF æqualis angulo EfF.

 Puncta

Puncta itaq; tria F, E, f sunt ad circulum, quem tangit recta ED in E. Sed quoniam est fI æqualis FI, atq; angulus FIK rectus, centrum istius circuli est in rectâ IK; item quoniam est angulus DEK rectus, centrum illud est etiam in rectâ EK. Est ergo K centrum istius circuli, adeoq; FK æqualis est ipsi EK. Jam (*per Prop.* 3.) sunt F focus Trajectoriæ, atq; CA quarta pars parametri ad punctum A. Unde cum sit CE ad AC & EK perpendicularis, atq; FK æqualis EK, erit punctum K ad Trajectoriam (per conica). *Q. E. D.*

PROP. VI.

Iisdem datis, invenire occursum Trajectoriæ cum rectâ, quâlibet positione datâ.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. 5.) in directione AB, sitq; GH recta cujus occursus cum Trajectoriâ quæritur. Duc AC in directione gravitati contrariâ, atq; æqualem altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem, quâ sit projectio; & duc AF æqualem ipsi AC, ita ut sit angulus FAB æqualis angulo CAB; & ducatur CE perpendicularis ipsi CA. Ducatur FI ipsi GH occurrens ad angulos rectos in I, atq; ipsi CE in D; & in FI fiat fI æqualis FI. In CE fiat ED media proportionalis inter FD & fD; & ipsi CE ducatur perpendicularis EK, ipsi GH occurrens in K. Erit K punctum quæsitum. *Q. E. I.*

DEMONSTRATIO.

Conjungendo fE demonstratur ad modum propositionis præcedentis.

Scholium.

Scholium. Quoniam punctum *E* sumi potest ad utramlibet partem puncti *D*, duo sunt puncta *K*, *k*; ubi recta *G H* occurrit Trajectoriæ.

PROP. VII.

Datâ velocitate projectionis, invenire directionem, quæ faciat, ut Trajectoria transeat per punctum datum.

Projiciatur corpus de loco *A*, (Fig. 4.) & sit *K* punctum, per quod transire debet Trajectoria quæsita. Fiat *A C*, in directione gravitati contrariâ, æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem projectionis. Ducatur *C E* ipsi *A C* perpendicularis, & ad eam duc *K E* perpendicularem. Centris *A* & *K*, & radiis *C A*, *E K* describantur duo circuli sibi mutuo occurrentes in *F*. Duc *F A*, & biseca angulum *C A F* rectâ *A B*. Erit *A B* directio quæsita, in quâ fieri debet projectio, ut transeat Trajectoria per punctum *K*. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Est *C A* æqualis quartæ parti parametri ad punctum *A* (per *Prop.* 2.) Et per constructionem sunt *F A*, *C A* æquales, item *F K*, *E K*. Est ergo *F* focus Parabolæ per puncta *A*, *K*, descriptæ. Sed illam tangit recta *A B* in *A*, propter angulos *F A B*, *C A B* æquales. Corpore itaq; projecto de puncto *A*, in directione *A B*, eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem *C A*, transibit Trajectoria per punctum *K*. *Q. E. D.*

NB. Cum

NB. Cum circulorum centris *A*, *K*, & radiis *C A*, *E K*, deſcriptorum duo ſint concurſus, *F*, *f*, biſectis angulis *F A C*, *f A C*, duo etiam erunt directiones, quæ faciant, ut Trajectoria tranſeat per punctum datum *K*.

PROP. VIII.

Datâ directione projectionis, invenire velocitatem, quæ faciat ut Trajectoria tranſeat per punctum datum.

Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 6.) in directione rectæ *A B*, & faciendum ſit ut tranſeat Trajectoria per punctum *K*. Duc *A K*, eamq; biſeca in *C*, & in directione gravitatis duc *C B*, ipſi *A B* occurrentem in *B*; & junge *B K*. Duc *A D*, *K E*, ipſi *C B* parallelas, & ducantur *A F*, *K F* ſibi mutuo occurrentes in *F*, ita ut ſint anguli *F A B*, *D A B* æquales, item *F K B*, *E K B*. Erit *F A* æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere poteſt velocitatem quæſitam, quâ projectio fieri debet in directione *A B*, ut tranſeat Trajectoria per *K*. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Quoniam *C B* eſt in directione gravitatis, eſt diameter Parabolæ; & quoniam *C A* æqualis eſt *C K*, eſt *C B* diameter ad ordinatam *A K*. Unde cum ſit *A B* tangens ad parabolam in *A*, erit etiam *K B* tangens ad punctum *K*. Hinc quoniam *A D* eſt in directione diametrorum, atq; angulus *F A B* æqualis angulo *D A B*, tranſit *A F* per focum parabolæ. Eodem argumento tranſit etiam *K F* per focum. Eſt ergo

ergo *F* focus parabolæ, adeoq; *F A* quarta pars parametri ad punctum *A*, quæ proinde æqualis est altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem ad hoc necessariam, ut projecto corpore de *A*, in directione *A B*, transseat Trajectoria per punctum *K*.

PROP. IX.

Invenire velocitatem minimam & directionem ei congruam, quâ fieri potest, ut transseat Trajectoria per punctum datum.

Projiciendum sit corpus de loco *A* (Fig. 7.) cum velocitate omnium minimâ & directione ei congruâ, quâ fieri potest ut perveniat in locum *K*, hoc est ut transseat Trajectoria per punctum *K*. Ductis *A C*, *K E* in directione gravitati contrariâ, & ductâ *A K*, biseca angulos *C A K*, *E K A*, rectis *A B*, *K B*, sibi mutuo occurrentibus in *B*. Duc *B C* ipsi *A C* occurrentem ad angulos rectos in *C*, atq; erit *C A* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem quæsitam; eritq; *A B* directio quæsita. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Ducatur *B F* ipsi *A K* occurrens ad angulos rectos in *F*, atque occurrat *C B* ipsi *K E* in *E*. Propter angulos *C A B*, *B A F*, item angulos *E K B*, *B K F*, æquales atq; angulos rectos in *C*, *E*, & *F*, erunt æquales *C A*, *F A*, item *E K*, *F K*. Hinc constat puncta *A*, *K* esse ad parabolam, quam tangit recta *A B* in *A*, cujusq; parameter ad punctum *A* est quadruplum altitudinis *C A*, foco existente *F*. Corpore itaque

projecto

projecto de A in directione $A\,B$, eâ cum velocitate, quam corpus acquirere poteſt cadendo per altitudinem $C\,A$, Trajectoria erit dicta Parabola (per Prop. 2.) Dico autem illam eſſe velocitatem minimam, ſeu eſſe $C\,A$ partem quartam parametri omnium minimæ, quâ Parabola deſcribi poteſt, quæ tranſeat per puncta A, K.

Si fieri poteſt, in $C\,A$ capiatur altitudo $c\,A$ minor, quæ ſit quarta pars parametri ad punctum A. Duc ipſi $C\,A$ perpendicularem $c\,e$, ipſi $K\,E$ occurrentem in e, & centro A & radio $A\,c$ deſcribatur circulus ipſi $A\,K$ occurrens in f. Quoniam $c\,A$ dicitur quarta pars parametri ad punctum A, focus Parabolæ erit punctum aliquod p, in circumferentia circuli $c\,p\,f$, centro A & radio $A\,c$ deſcripti. Si ergo ſit punctum K ad parabolam illam, erit $p\,K$ æqualis $e\,K$. Eſt vero $F\,K$ æqualis $E\,K$. Unde cum ſit $e\,K$ minor ipſâ $E\,K$, erit etiam $p\,K$ minor ipſâ $F\,K$. Sed eſt $p\,K$ major ipſâ $f\,K$, atq; eſt $f\,K$ major ipſâ $F\,K$, (quoniam eſt $f\,A$ minor ipſâ $F\,A$ per hyp.) unde fit $p\,K$ major ipſâ $F\,K$. Sed jam dicebatur $p\,K$ minor ipſâ $F\,K$; quæ repugnant. Nequit ergo Parabola deſcribi, quæ tranſeat per puncta A, K, minori parametro quam in ſolutione definitum eſt. *Q. E. D.*

PROP. X.

Datâ velocitate projectionis, invenire directionem, quæ faciat, ut corpus projiciatur ad diſtantiam omnium maximam in plano dato; atq; diſtantiam illam definire.

Sit planum datum $A\,K$ (Fig. 8.) atq; invenienda ſit diſtantia maxima $A\,K$, ad quam corpus projici poteſt in plano illo.

Duc

Duc *AC* in directione gravitati contrariâ, æqualem quartæ parti parametri ad punctum *A*. Tum bisecto angulo *CAK* rectâ *AB*, erit *AB* directio projectionis quæsita. Duc *CB* ipsi *CA* perpendicularem, rectæ *AB* occurrentem in *B*, atque in *CB* productâ fiat *BE* æqualis ipsi *BC*. Tum ductâ *EK*, ipsi *CA* parallelâ, quæ occurrat plano *AK* in *K*, erit *AK* distantia maxima quæsita.

DEMONSTRATIO.

Centro *A* & radio *AC* describe circulum, ipsi *AK* occurrentem in *F*, & ducantur *BF*, *BK*. Quoniam anguli *CAB*, *BAF* sunt æquales (per constructionem) atque *AF* æqualis *CA*, erit *BF* æqualis *CB*, æqualis *BE* (per constructionem) atq; anguli ad *F* recti. Unde etiam fit *FK* æqualis *EK*. Sunt ergo puncta *A*, *K* ad parabolam foco *F* descriptam, quam tangit *AB* in *A* (propter angulos *CAB*, *FAB* æquales) quartâ parte parametri ad punctum *A* existente *CA*. Corpore igitur projecto de loco *A*, in directione *AB*, eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem *CA*, Trajectoria transibit per punctum *K* (per Prop. 2.) *Q. E. D.*

Dico autem, quod sit *KA* distantia omnium maxima, ad quam corpus projici potest de loco *A* eâdem cum velocitate.

Si fieri potest, eâdem parametro, ad *A* describatur parabola, quæ transeat per punctum distantius *k*; hoc est projiciatur corpus ad distantiam majorem *kA*. Duc *Bk*, atq; ipsi *KE* parallelam *ke*, ipsi *CE* occurrentem in *e*. Quoniam *FB*, *EB*, item *FK*, *EK* sunt æquales, sunt etiam anguli *FBK*, *EBK* æquales. Angulus ergo *FBk* major est angulo *kBe*; unde

ſit *k F* major ipſa *k e*. Sed quoniam eſt *A C* quarta pars parametri ad punctum *A*, focus parabolæ erit alicubi in circumferentiâ circuli centro *A*, & radio *C A* deſcripti. Sit focus ille *p*, & ducatur *p k*. Tum quoniam *p k* major eſt ipſâ *F k*, erit etiam *p k* major ipſâ *k e*. Sed ut parabola tranſeat per punctum *k*, debet eſſe *p k* æqualis *k e*. Nequit ergo parabola duci in circumſtantiis propoſitis, quæ tranſeat per punctum *k* diſtantius puncto *K*; adeoq; nec corpus projici ad diſtantiam majorem ipſâ *K A*. *Q. E. D.*

PROP. XI.

Iiſdem poſitis, invenire locum puncti K, *ſeu Curvam deſcribere, quæ tangat omnes parabolas eodem vertice* A *& eâdem parametro deſcriptas.*

Sit *A* (Fig. 9.) vertex datus, atq; in directione gravitati contrariâ ducatur *A C* æqualis quartæ parti parametri datæ. Tum deſcriptâ parabolâ, cujus vertex principalis ſit *C*, atq; focus *A*; erit ea curva quæſita.

DEMONSTRATIO.

Duc quamlibet *A K*, atq; in eâ ſume *F A* æqualem *C A*, & ducatur *C B* ad *C A* perpendicularis, ſitq; *K* punctum in propoſitione præcedente inventum. In *A C* productâ, factâ *C c* æquali *C A*, ducatur *c e* parallela ipſi *CE*; ducatur etiam *K E* parallela ipſi *AC*, ipſis *C E*, *c e* occurrens in *E* & *e*. Per propoſitionem præcedentem eſt *K E* æqualis ipſi *F K*; unde cum ſit etiam *F A* æqualis ipſi *A C*, æqualis ipſis *C c*, *E e* (per con-

conſtructionem) eſt ergo Ke æqualis KA; unde eſt punctum K ad parabolam foco A & vertice principali C deſcriptam. *Q. E. D.*

Biſecto autem angulo AKE à rectâ KB, tanget hæc utramq; parabolam, tam foco F per A & K, quam foco A per K deſcriptam. Unde ſe mutuo tangunt parabolæ. *Q. E. D.*

Errat. *Pag.* 152. *l. ult.* pro βc. *l.* Bb.

F I N I S.

L O N D O N:

Printed for *W.* and *J. Innys*. Printers to the Royal *Society*; at the Sign of the *Prince's* Arms,
End of St. *Paul's-Church-Yard.*